iii) Wir erinnern an folgende Aussagen:

Ist $g : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine auf Ω integrierbare Funktion, also $g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, so ist

$$(1) \qquad \int_\Omega \| g \| \, dx = \sup_{\substack{V \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}), \\ \|V\| \leq 1}} \int_\Omega g \cdot V \, dx,$$

wo „ $\cdot$ " das übliche Skalarprodukt (mit Norm $\|\cdot\|$) bezeichnet.

Dies folgt aus der bekannten Dualraumdarstellung

$$L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})^* = L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}),$$

die sagt, daß die stetigen linearen Funktionale $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow \mathbb{R}$ genau als Integrale mit $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ - Funktionen geschrieben werden können.

Ist allgemein X ein Banachraum mit Dualraum X^*, so bekommt man als eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach die Charakterisierung

$$|\xi| = \sup_{\varphi \in X^*, \, |\varphi| \leq 1} \varphi(x),$$

und genau diese Eigenschaft führt mit der Wahl $X = L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ ($\Longrightarrow X^* = L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$) auf die Identität (1).

Seien nun f, f_m wie in iii) vorausgesetzt. Mit $M := \sup_m \operatorname{Lip}(f_m)$ gilt natürlich auch $\operatorname{Lip}(f) \leq M$, wie man aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_m \to f$ unschwer erkennt.

Nach (1) wählen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $V \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, $\|V\| \leq 1$, mit

$$A(f) \leq \varepsilon + \int_\Omega V \cdot (1, \nabla f)\, dx .$$

Da Ω beschränkt ist, gilt

$$L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}),$$

und bekanntlich liegt $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ dicht in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ bzgl. der L^1-Norm. Also finden wir eine glatte Funktion

$$\tilde{V} : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$$

mit kompaktem Träger und

$$\int_\Omega \|V - \tilde{V}\|\, dx \leq \varepsilon .$$

Es folgt

$$A(f) \leq \varepsilon + \int_\Omega \tilde{V} \cdot (1, \nabla f)\, dx + \int_\Omega (V - \tilde{V}) \cdot (1, \nabla f)\, dx \leq$$

$$\varepsilon + \varepsilon \cdot \sqrt{1 + M^2} + \int_\Omega \tilde{V} \cdot (1, \nabla f)\, dx .$$

Für Lipschitz Funktionen gilt der Divergenzsatz

$$\int_\Omega (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) \cdot \nabla f \, dx = - \int_\Omega f \cdot \mathrm{div}(\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) \, dx \, ,$$

Randterme hat man keine, denn $\tilde{V}$ verschwindet ja bei $\partial\Omega$.

Also gilt gemäß $f_m \to f$ gleichmäßig:

$$A(f) \leq \varepsilon \cdot \left(1 + \sqrt{1+M^2}\right) + \int_\Omega \left(\tilde{v}_1 - f \cdot \mathrm{div}(\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1})\right) dx$$

$$= \varepsilon \cdot \left(1 + \sqrt{1+M^2}\right) + \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \left(\tilde{v}_1 - f_m \, \mathrm{div}(\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1})\right) dx$$

$$= \varepsilon \cdot \left(1 + \sqrt{1+M^2}\right) + \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \tilde{V} \cdot (1, \nabla f_m) \, dx .$$

Schließlich ist wie eben (denn $\int_\Omega V \cdot (1, \nabla f_m) \leq A(f_m)$)

$$\int_\Omega \tilde{V} \cdot (1, \nabla f_m) \, dx \leq \int_\Omega V \cdot (1, \nabla f_m) \, dx + \varepsilon \sqrt{1+M^2}$$

$$\leq A(f_m) + \varepsilon \cdot \sqrt{1+M^2} \, ,$$

also

$$A(f) \leq \varepsilon \left(1 + 2 \cdot \sqrt{1+M^2}\right) + \liminf_{m\to\infty} A(f_m) .$$

Da man hierbei $\varepsilon > 0$ noch beliebig wählen darf, folgt (iii).

Eine allgemeinere Unterhalbstetigkeitsaussage bzgl. uniformer Lipschitz Konvergenz, für Funktionale der Form

$$\mathcal{F}(f) = \int_\Omega \Phi(\nabla f)\, dx$$

mit beliebiger konvexer Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ findet man bei Massari & Miranda "Minimal surfaces of codimension 1", Chapter III.

II. Diskussion approximativer Probleme

Bei konvexem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Randfunktion, von der wir annehmen: φ hat eine Fortsetzung als Element von

$$\mathrm{Lip}(\Omega) = \{\text{alle Lipschitz stetigen Abb. } \overline{\Omega} \to \mathbb{R}\}$$

(man beachte hier die kleine Abweichung von unserer früheren Def. dieses Raumes. die Lipschitz Stetigkeit soll bis zum Rand gehen; das spielt aber letztendlich keine Rolle, denn eine Lipschitz Abb. $\Omega \to \mathbb{R}$ auf beschränktem Ω läßt sich immer unter Erhaltung der Lipschitz Konstante auf $\overline{\Omega}$ ausdehnen).

Die Fortsetzung von φ werde wieder mit φ bezeichnet. Für

$$R \geq \mathrm{Lip}(\varphi)$$

sei

$$\mathrm{Lip}_R(\Omega, \varphi) := \{ f \in \mathrm{Lip}(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega},\ \mathrm{Lip}(f) \leq R \},$$

also die Menge aller Funktionen $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die am Rand mit

φ übereinstimmen und deren Lipschitz Konstanten uniform durch R beschränkt sind. Dann gilt

<u>SATZ 6.2:</u> In $Lip_R(\Omega,\varphi)$ gibt es genau eine Minimalstelle des Flächenfunktionals A_Ω, d.h. man findet $f_R \in Lip_R(\Omega,\varphi)$ mit

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f) \quad \forall f \in Lip_R(\Omega,\varphi).$$

Der Beweis benutzt die <u>direkte Methode der Variationsrechnung</u>:

Sei (f_m) eine Minimalfolge in $Lip_R(\Omega,\varphi)$, d.h. per Definition

$$A_\Omega(f_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{f\in Lip_R(\Omega,\varphi)} A_\Omega(f).$$

Es gilt $\quad \mathcal{L}ip(f_m) \leq R \quad$ und deshalb mit fixiertem $x_0 \in \partial\Omega$

$$|f_m(x)| \leq |f_m(x_0)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| \leq$$

$$|\varphi(x_0)| + R\cdot|x-x_0| \leq |\varphi(x_0)| + R\cdot \mathrm{diam}(\Omega),$$

also ist die Folge (f_m) gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es eine Teilfolge (wieder (f_m) genannt) und $f \in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ mit

$$f_m \longrightarrow f \quad \text{gleichmäßig auf } \overline{\Omega}.$$

Trivialerweise ist $f \in Lip_R(\Omega,\varphi)$, die Minimalität folgt aus Teil iii) des vorigen Satzes, denn

$$A_\Omega(f) \le \liminf_{m\to\infty} A_\Omega(f_m) = \inf_{\mathrm{Lip}_R(\Omega,\varphi)} A_\Omega .$$

Die Eindeutigkeit der Minimalstelle schließt man aus ii) von Satz 6.1.

∎

BEMERKUNG: Es ist keineswegs klar, ob die Funktion f_R tatsächlich Lösung unseres ursprünglichen Problems

$$A_\Omega(\cdot) \to \mathrm{Min} \quad \text{auf } \mathrm{Lip}(\Omega) \cap \{f : f|_{\partial\Omega} = \varphi\}$$

ist, denn die Minimalstelle (sofern sie existiert!) könnte ja durchaus Lipschitz Konstante $> R$ haben, und f_R minimiert nur in der eingeschränkten Klasse. Diesen Aspekt werden wir später wieder aufgreifen.

SATZ 6.3: (Eigenschaften der Funktionen f_R)

i) Ist Ω' ein konvexes Teilgebiet von Ω, so ist $f_R|_{\Omega'}$

$$A_{\Omega'}\text{-minimal in } \mathrm{Lip}_R(\Omega', f_R|_{\partial\Omega'}).$$

ii) Sei ψ eine Lipschitz Funktion mit $\mathrm{Lip}(\psi) \le R$ und $\varphi \le \psi$ auf $\partial\Omega$. g_R sei A_Ω-minimal in $\mathrm{Lip}_R(\Omega,\psi)$. Dann ist $f_R \le g_R$ auf $\overline{\Omega}$.

Streicht man die Voraussetzung "$\varphi \le \psi$" auf $\partial\Omega$, so ist

$$\sup_{\Omega} |f_R - g_R| \le \sup_{\partial\Omega} |\varphi - \psi| .$$

iii) Ist $f \in Lip_R(\Omega, \varphi) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf Ω, so folgt $f = f_R$.

Beweis: i) Angenommen, es gibt eine Funktion $g \in Lip_R(\Omega', f_R|_{\partial\Omega'})$ mit

$$A_{\Omega'}(g) < A_{\Omega'}(f_R|_{\Omega'}).$$

Dann setzt man

$$\tilde{f} := \begin{cases} g & \text{auf } \Omega' \\ f_R & \text{auf } \Omega - \Omega' \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig auf $\overline{\Omega}$ mit Randwerten φ. Zu zeigen ist

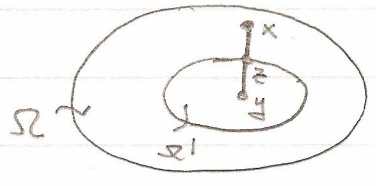
$$Lip(\tilde{f}) \leq R.$$

Dazu wählen wir $x, y \in \Omega$ und haben zu zeigen

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq R \cdot |x - y|,$$

was für $x, y \in \overline{\Omega'}$ oder $x, y \in \overline{\Omega} - \overline{\Omega'}$ ist das klar, in der Diskussion bleibt der Fall

$$x \in \Omega - \Omega', \quad y \in \Omega'.$$



Dann verbindet man x und y durch eine Strecke, $z \in \partial\Omega'$ sei der Punkt, wo diese Strecke den Rand $\partial\Omega'$ trifft. Dann ist

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)| + |\tilde{f}(z) - \tilde{f}(y)| =$$

$$|f_R(x) - f_R(z)| + |g(z) - g(y)| \le R \cdot (|x-z| + |x-y|) = R\,|x-y|.$$

Mithin ist $\tilde{f} \in Lip_R(\Omega, \varphi)$, also

$$A_\Omega(f_R) \le A_\Omega(\tilde{f}),$$

was aber $A_{\Omega'}(f_R) \le A_{\Omega'}(g)$ bedeutet, Widerspruch!

ii) Die Funktion $\min(f_R, g_R)$ gehört zu $Lip_R(\Omega, \varphi)$, also

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx = A_\Omega(f_R) \le A_\Omega(\min(f_R, g_R)) =$$

$$\int_{[f_R \le g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx + \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx \Longrightarrow$$

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx \le \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx \qquad (a)$$

Hierbei haben wir benutzt

$$\nabla \max(\eta, \rho) = \begin{cases} \nabla \eta & \text{f.ü. auf } [\eta \ge \rho] \\ \nabla \rho & \text{f.ü. auf } [\eta \le \rho] \end{cases}$$

und entsprechend für $\min(\eta, \rho)$, wenn η, ρ beliebige Lipschitz Funktionen sind.

Analog gehört $\max(f_R, g_R)$ zu $Lip_R(\Omega, \psi)$, es folgt

$$\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx \leq A_\Omega(\max(f_R, g_R)) =$$

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx + \int_{[f_R \leq g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx \Longrightarrow$$

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx \leq \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx \qquad (b)$$

Aus (a), (b) folgt

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla g_R|^2}\, dx = \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1+|\nabla f_R|^2}\, dx,$$

also

$$A_\Omega(f_R) = A_\Omega(\min(f_R, g_R)),$$

d.h. wegen der Eindeutigkeit der Minimalstelle f_R in $\mathrm{Lip}_R(\Omega, \varphi)$ gilt

$$f_R = \min(f_R, g_R),$$

mithin $f_R \leq g_R$.

Nun wird die Voraussetzung $\varphi \leq \psi$ auf $\partial\Omega$ entfernt. Sei

$$M := \sup_{\partial\Omega} |\varphi - \psi|.$$